Licence 3 « Information, Systèmes et Technologie »

Signaux et systèmes linéaires

Polycopié de cours

François Orieux*†

2016 — 2017

orieux@l2s.centralesupelec.fr

Laboratoire des Signaux et Systèmes

3 rue Joliot-Curie, 91 192 Gif-sur-Yvette

Table des matières

Avant propos

Ce polycopié, encore incomplet, présente l'essentiel des outils pour l'analyse des signaux et systèmes linéaires, continus et échantillonnés, domaine intervenant dans tous les domaines de l'ingénieurie et de la physique. La plupart des raisonnements et figures exposées en cours sont absents. Il s'agit d'un support qui doit être complété par une prise de notes.

†Inspiré des document de G. Demoment, M. Kowalski, B. Torrésani, A. Abergel, ...

Références

[1] Bernard Picinbono. *Éléments de théorie du signal*. Dunod Universités, 1977.

[2] Bernard Picinbono. *Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus*. Paris, France : Dunod Université, 1989.

[3] Bernard Picinbono. *Signaux aléatoires – Probabilités et variables aléatoires avec problèmes résolus*. En trois volumes. Dunod Université, 1993.

[4] Walter Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K éditions, 2002.

1 Signaux

1.1 Signaux analogiques

1.1.1 Définitions

- Les signaux portent une information et sont transmis et modifiés par les systèmes.
- Les signaux analogiques sont fonctions du temps ou de l'espace et à valeur dans $\mathbb{C}$
$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto s(t).$$
- Un signal s est causal si
$$s(t) = 0, \forall t < 0.$$
- Un signal s est stable – $s \in L^1(\mathbb{R})$ – si
$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty.$$
- L'énergie d'un signal s est
$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$
- Un signal est à énergie finie – $s \in L^2(\mathbb{R})$ – si
$$\|s\|^2 < +\infty.$$
- Un signal s est périodique, de période T, si
$$s(t + T) = s(t).$$
- Un signal s à temps fini est à support borné
$$\operatorname{supp}(s) = \{t,\ s(t) \neq 0\} \subset [-T, T].$$
- $L^2([0, T]) \subset L^1([0, T])$.

1.1.2 Signaux élémentaires

— La fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— La fonction porte, $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— L'exponentielle complexe

$$e^{pt}, \text{ avec } p \in \mathbb{C} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

— La cissoïde, soit l'exponentielle complexe avec p restreint à l'axe imaginaire

$$e^{\imath\omega t} = \cos(\omega t) + \imath \sin(\omega t), \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}\text{et} .$$

— La distribution de Dirac, forme linéaire définie sur un espace de fonctions, telle que

$$\langle \delta_t, f \rangle = \int f(u)\, \delta_t(u)\, \mathrm{d}u = f(t).$$

C'est un opérateur d'échantillonnage, ou de prélèvement. C'est la dérivé, au sens des distributions, de la fonction de Heaviside en 0.

1.2 Signaux numériques

Les signaux numériques réels sont des ensembles finis de points $\{s_n\}_{n \in [0,\ldots,N-1]}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Dans la pratique on considère des suites $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les signaux numériques sont généralement obtenus par échantillonnage et quantification des signaux analogiques. Ce sont les seuls aisément stockables.

1.2.1 Définitions

— Un signal numérique $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est défini comme

$$\begin{aligned} s : \mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto s[n] = s_n. \end{aligned}$$

— Un signal numérique s est causal si

$$s_n = 0, \ \forall k < 0.$$

si $s_0 = 0$ le signal est strictement causal.

— Un signal numérique s est stable – $s \in \ell^1(\mathbb{R})$ – si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n| < +\infty.$$

— L'énergie d'un signal numérique s est

$$\|s\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|^2.$$

— Un signal est à énergie finie – $s \in \ell^2(\mathbb{R})$ – si

$$\|s\|^2 < +\infty.$$

— Un signal numérique s périodique, de période $T \in \mathbb{N}$, respecte

$$s_{n+T} = s_n.$$

— Un signal numérique s est à temps fini si

$$\mathrm{supp}(s) = \{k, s_n \neq 0\}$$

est fini.

1.2.2 Signaux numériques élémentaires

— La suite de Heaviside, $H : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— L'exponentielle complexe

$$e^{pn}, \text{ avec } p \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

— La cissoïde, soit l'exponentielle complexe avec p restreint à l'axe imaginaire

$$e^{\imath\omega n} = \cos(\omega n) + \imath \sin(\omega n), \text{ avec } [\omega, n] \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}.$$

— L'*impulsion* de Dirac, ou la fonction de Kronecker, définie sans difficulté, pour $n \in \mathbb{N}$, comme

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2 Systèmes linéaires invariants

— Un système transmet et modifie un signal.

— Il possède une entrée $e \in \mathcal{E}$ et délivre une sortie $s \in \mathcal{S}$.

— C'est un opérateur $\mathcal{H}$ qui associe un signal à un autre signal $\mathcal{H} : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$.

— L'entrée peut être appelée excitation et la sortie la réponse.

2.1 Systèmes analogiques

— Un système est linéaire si pour

$$\mathcal{H}(e_1) = s_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(e_2) = s_2$$

alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{H}(ae_1 + be_2) = as_1 + bs_2.$$

— Un système analogique est invariant si

$$s(t) = \mathcal{H}\big(e(t)\big)$$

alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$s(t - t_0) = \mathcal{H}\big(e(t - t_0)\big).$$

— La réponse impulsionnelle (RI) est, par définition, la réponse du système à une impulsion de Dirac

$$h = \mathcal{H}(\,\delta\,).$$

— La relation entré-sortie est un produit de convolution [1] entre l'entrée et la réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned} s(t) &= (e * h)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e(u) h(t - u)\, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

— Si le système est seulement linéaire on a

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e(u) h(t, u)\, \mathrm{d}u.$$

— Le produit de convolution est commutatif

$$e * h = h * e = \int_{\mathbb{R}} h(u) e(t - u)\, \mathrm{d}u.$$

1. Souvent appelé simplement « la convolution ».

2.2 Systèmes numériques

— Un système numérique est invariant si pour

$$s_n = \mathcal{H}(e_n)$$

alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$s_{n-k} = \mathcal{H}(e_{n-k}).$$

— La réponse impulsionnelle est

$$h = \mathcal{H}(\delta).$$

avec δ la fonction de Kronecker.

— La relation entré-sortie est un produit de convolution discret entre l'entrée et la réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned} s_n &= (e * h)_n \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k h_{n-k}. \end{aligned}$$

— Si le système est uniquement linéaire on a

$$s_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k h_{n,k}.$$

2.3 Réponse impulsionnelle

— Les SLI sont entièrement caractérisés par leur RI.

— Les SLI réalisables doivent obéir au principe de causalité : les effets ne précédent pas les causes.

— Par conséquent la RI *doit* être causale.

— De même les SLI doivent être stables : si l'entrée est bornée, la sortie doit être bornée.

— Par conséquent la RI *doit* être stable.

2.4 Signaux propres d'un SLI analogique

Les exponentielles complexes sont les *signaux propres* des SLI. En effet soit l'entrée $e(t) = e^{pt},\ p \in \mathbb{C}$ d'un SLI de RI $h(t)$, alors

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{pu} h(t-u)\,\mathrm{d}u \\ &= e^{pt} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-pu}\,\mathrm{d}u \\ &= H(p)e^{pt} = H(p)\cdot e(t) \end{aligned}$$

avec $H(p) \in \mathbb{C}$ la *valeur propre* associée à e^{pt}.

2.5 Signaux propres d'un SLI numérique

Les suites $e_n = \{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $z \in \mathbb{C}$, sont les signaux propres des SLI numériques

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{n-k} z^k \\ &= z^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k z^{-k} \\ &= H(z) z^n = H(z)\cdot e_n \end{aligned}$$

avec $H(z) \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée à $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

3 Transformations de Fourier

3.1 Signaux à support borné

— On considère des fonctions appartenant à $L^2([0,T])$, à support sur $[0,T]$.

— Le produit scalaire pour tout $f, g \in L^2([0,T])$ est

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) g^*(t)\,\mathrm{d}t.$$

— On a la norme $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

3.1.1 Base orthonormée de $L^2([0,T])$

Théorème 1. *L'ensemble des fonctions* $\left\{e_l(t) = e^{\imath 2\pi \frac{l}{T} t}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ *avec* $t \in [0,T]$, *forme une base orthonormée de* $L^2([0,T])$.

— On peut donc projeter ces fonctions sur les fonctions e_l de cette base par produit scalaire.

— Le résultat s'appel *coefficients de Fourier* de f

$$\begin{aligned} c_l[f] &= F_l = \langle f, e_l\rangle \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\imath 2\pi \frac{l}{T} t}\,\mathrm{d}t,\ \forall l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

— La reconstitution à partir des coefficients F_l et des vecteurs e_l est la *série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} F_l e_l(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} F_l e^{\imath 2\pi \frac{l}{T} t}.$$

— L'indice l est associé à la fréquence $\frac{l}{T}$.

— Convergence « en norme »

$$\lim_{L\to+\infty} \|f(t) - \sum_{l=-L}^{L} F_l e_l(t)\| = 0.$$

— Égalité sous conditions
Théorème 2. *Soit* $f \in L^2([0,T])$ *continue en* t_0 *alors*

$$S_f(t_0) = f(t_0).$$

Si $f \in L^2([0,T])$ *est continu* par morceau, *alors*

$$\lim_{L\to+\infty} \sum_{l=-L}^{L} F_l e_l(t_0) = S_f(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

— Conservation de l'énergie
Théorème 3. ***Plancherel–Parseval*** *Soit* $f \in L^2([0,T])$ *et ses coefficients de Fourier* $\{F_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ *alors*

$$\|f\|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |F_l|^2.$$

3.1.2 Propriétés des coefficients

Soit $f, g \in L^2([0,T])$. On a

linéarité

$$c_l[f+g] = F_l + G_l.$$

Conjugaison

$$c_l[f^*] = F_l^*.$$

Inversion
$$c_l[f(-t)] = c_{-l}[f(t)].$$

Décalage
$$c_l[f(t+a)] = c_l[f(t)]e^{\imath 2\pi \frac{l}{T} a},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dérivation
$$c_l\left[f^{(n)}\right] = \left(\imath 2\pi \frac{l}{T}\right)^n c_l[f].$$

3.1.3 Coefficients trigonométriques de signaux réels

— On appelle coefficients de Fourier trigonométriques les nombres
$$\begin{aligned} a_0[f] &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \\ a_l[f] &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi\frac{l}{T}t\right)\mathrm{d}t,\ \forall l \geq 1, \\ b_l[f] &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi\frac{l}{T}t\right)\mathrm{d}t,\ \forall l \geq 1. \end{aligned}$$

— Par la formule d'Euler
$$\begin{aligned} F_0 &= c_0[f] = a_0[f], \\ F_l &= \frac{a_l[f] - \imath b_l[f]}{2}, \\ F_{-l} &= \frac{a_l[f] + \imath b_l[f]}{2}, \\ a_l[f] &= F_l + F_{-l}, \\ b_l[f] &= \imath\left(F_l - F_{-l}\right). \end{aligned}$$

— La décomposition en série de Fourier devient
$$S_f(t) = a_0[f] + \sum_{l=1}^{+\infty} a_l[f]\cos\left(2\pi\frac{l}{T}t\right) + \sum_{l=1}^{+\infty} b_l[f]\sin\left(2\pi\frac{l}{T}t\right).$$

— Si $f \in L^2([0,T])$ est paire alors
$$\begin{aligned} b_l[f] &= 0,\ \forall l \geq 1, \\ a_l[f] &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(2\pi\frac{l}{T}t\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

— Si $f \in L^2([0,T])$ est impaire alors
$$\begin{aligned} a_l[f] &= 0,\ \forall l \geq 0, \\ b_l[f] &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\left(2\pi\frac{l}{T}t\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3.1.4 Phénomène de Gibbs

— Sauf cas particulier, il faut une infinité de coefficients F_l.
— Si on n'utilise qu'un nombre limité, on observe des oscillations, en particulier au changements brusques.
— Exemple : la fonction créneau
$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi, \end{cases}$$
a pour décomposition en série de Fourier
$$S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\sin((2n+2)t).$$

3.1.5 Signaux périodiques

La série de Fourier s'applique aux fonctions $f \in L^2([0,T])$, donc également à toutes les fonctions périodiques de période T en considérant la base $\left\{e_l(t) = e^{\imath 2\pi \frac{l}{T} t}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$.

3.2 Signaux à énergie finie

Définition 1. ***Transformée de Fourier.*** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définie la transformée de Fourier F de f la fonction*
$$F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\imath 2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t.$$

— Définition avec la pulsation $2\pi\nu = \omega \in \mathbb{R}$
$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

— *Inversion* : si $f \in L^2$ est continue en t et $F \in L^2$ alors
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu)e^{\imath 2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu.$$

— Régularité : si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors F est continue, bornée et
$$\lim_{\nu\to+\infty} F(\nu) = 0.$$

— Conservation de l'énergie
Théorème 4. ***Plancherel-Parseval.*** *Soit $f \in L^2$ alors*
$$\|f\|^2 = \|F\|^2$$
soit
$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |F(\nu)|^2 d\nu.$$

— Conservation du produit scalaire
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} F(\nu)G^*(\nu)\mathrm{d}\nu.$$

3.2.1 Propriétés

La convolution temporelle est une multiplication fréquentielle
$$f * g \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F \times G.$$

La multiplication temporelle est une convolution fréquentielle
$$f \times g \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F * G.$$

La translation temporelle est un déphasage fréquentiel
$$f(t-t_0) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F(\nu)e^{-\imath 2\pi\nu t_0}.$$

La modulation par un sinus est une translation fréquentielle
$$f(t)e^{\imath 2\pi\nu_0 t} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F(\nu - \nu_0).$$

Le contraction temporelle est une dilatation fréquentielle, et inversement,
$$f(ct) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{|c|}F\left(\frac{\nu}{c}\right).$$

La dérivation est une multiplication par ν^p

$$f^{(p)}(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} (\imath 2\pi\nu)^p F(\nu),$$
$$(-\imath 2\pi\nu)^p f(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F^{(p)}(\nu).$$

La complexe conjuguée donne

$$f^*(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F^*(-\nu).$$

La symétrie hermitienne des signaux réels

$$f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow F(-\nu) = F^*(\nu).$$

3.2.2 Signaux à bandes limitées

- La largeur de bande d'un signal est le support de sa TF.
- Un signal à bande limitée à un support de TF borné, *i.e.*, $F(\nu) = 0, \forall |\nu| \notin [-B, B]$.

Théorème 5. ***Paley–Wiener.*** *Soit un signal f à support compact, alors sa* TF *ne peut pas être nulle sur un intervalle. Inversement, soit une* TF *à support compact, alors le signal f ne peut pas être nul sur un intervalle.*

3.2.3 Signaux périodiques

- Les signaux périodiques f ne possèdent pas de TF au sens de la définition 1.
- Ils possèdent une TF *au sens des distributions*.
- Elle utilise la distribution de Dirac et la propriété

$$\delta(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} 1 \quad \text{soit} \quad \delta(t-t_0) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} e^{-\imath 2\pi\nu t_0}$$

- On peut alors écrire

$$f(t) \in L^2([0,T]) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} F(\nu) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} F_l\, \delta\left(\nu - \frac{l}{T}\right)$$

avec

$$F_l = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{\imath 2\pi \frac{l}{T} t}\, \mathrm{d}t.$$

- On dit qu'un signal périodique possède *un spectre de raies*.

3.3 Signaux à temps discret

- Cas dual du précédent (partie 3.2.3) : le signal est discret

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\,\delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\,\delta(t-nT).$$

- Au sens des distributions, ce signal a une TF

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \int_{\mathbb{R}} \delta(t-nT) e^{-\imath 2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-\imath 2\pi n T\nu}. \end{aligned} \tag{1}$$

- On appelle l'équation (1) la *transformée de Fourier à temps discret*. Elle est continue.
- F est, comme attendue, périodique (f étant discret), de période $\frac{1}{T}$.
- C'est logiquement également une décomposition en série de Fourier avec

$$f_n = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} F(\nu) e^{\imath 2\pi n T\nu}\mathrm{d}\nu \tag{2}$$

les coefficients en série de Fourier de F, également appellé *transformée de Fourier inverse à temps discret*.
- On omet souvent la période d'échantillonnage avec $T = 1$ ce qui donne

$$F(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-\imath 2\pi n\nu},$$

1-périodiqe, et

$$f_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(\nu) e^{\imath 2\pi n\nu}\mathrm{d}\nu.$$

3.4 Signaux discrets périodiques

3.4.1 Transformation de Fourier

- Soit le signal discret *et* périodique

$$f(t) = \sum_n f_n\,\delta(t-nT) \tag{3}$$

de période NT.
- Ce signal est entièrement définie par le signal numérique $\{f_n\}_{n\in[0,\ldots,N-1]}$.
- Périodique donc décomposable en série de Fourier

$$f(t) = \sum_l F_l e^{\imath 2\pi \frac{l}{NT} t}$$

avec

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{1}{NT}\int_0^{NT} f(t) e^{-\imath 2\pi \frac{l}{NT} t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \int_{\mathbb{R}} \delta(t-nT) e^{-\imath 2\pi \frac{l}{NT} t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\imath 2\pi \frac{l}{N} n} \end{aligned}$$

périodique de période N (soit $F_{l+N} = F_l$).
- Le signal f est discret donc possède aussi une TF

$$F(\nu) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} F_l\,\delta\left(\nu - \frac{l}{NT}\right)$$

périodique de période $\frac{1}{T}$.
- $F(\nu)$ est entièrement définie par la suite $\{F_l\}_{l\in[0,\ldots,N-1]}$.
- On appel $\frac{l}{N}$ les fréquences réduites.
- Les fréquences réelles sont $\frac{l}{N}\frac{1}{T}$.

3.4.2 Transformation inverse

- Le spectre est périodique donc décomposable en série de Fourier

$$F(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'_n e^{-\imath 2\pi n T\nu}$$

avec

$$\begin{aligned} f'_n &= T\int_0^{\frac{1}{T}} F(\nu)e^{\imath 2\pi nT\nu}\,\mathrm{d}t \\ &= T\sum_{l=0}^{N-1} F_l \int_{\mathbb{R}} \delta\left(t-\frac{l}{NT}\right)e^{\imath 2\pi nT\nu}\,\mathrm{d}t \\ &= T\sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\imath 2\pi \frac{l}{N} n} \end{aligned}$$

périodique de période N.

— $F(\nu)$ possède une transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \sum_n f'_n\,\delta(t-nT)$$

et donc $f'_n = f_n$ par identification avec (3).

3.4.3 Synthèse

— Si f est discret périodique alors son spectre F est discret et périodique.

— f est périodique de période $NT \in \mathbb{N}$, échantillonné avec un pas T.

— f est entièrement définit par la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, périodique de période N.

— F est périodique de période $\frac{1}{T}$, échantillonné avec un pas $\frac{1}{NT}$.

— F est entièrement définie par la suite $\{F_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$, périodique de période N.

— Les relations entre $\{f_n\}$ et $\{F_l\}$ sont

$$\boxed{F_l = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\imath 2\pi \frac{l}{N} n}} \tag{4}$$

appelé *transformée de Fourier discrète* (TFD) de f (ou *Discrete Fourier Transform* DFT) et

$$\boxed{f_n = \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\imath 2\pi \frac{l}{N} n}} \tag{5}$$

appelé *transformée de Fourier discrète inverse*.

— Les deux TFD s'appliquent sur des signaux périodiques discrets au sens des distributions.

— Ils sont mis en œuvre sur ordinateur à partir des suites $\{f_n\}_{n\in[0,\dots,N-1]}$ et $\{F_l\}_{l\in[0,\dots,N-1]}$. Ce sont *les seuls* transformations disponibles pour les signaux numériques.

— Donc faire une TFD sur un signal numérique *implique l'hypothèse périodique pour f et F.*

— L'énergie est conservée

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = N\sum_{n=0}^{N-1} |F_n|^2.$$

— En pratique les algorithmes utilisés sont dits rapides et s'appelle Transformée de Fourier Rapide ou *Fast Fourier Transform* (FFT).

— Les deux suites sont des séries de Fourier l'une de l'autre.

3.5 Résumé

On peut considérer quatre transformations de Fourier

— La TF pour les signaux *continus* à énergie finie avec une transformée *continue*.

— La série de Fourier pour les signaux *périodiques* continus avec une transformée *discrète*.

— La TF à temps discret pour les signaux *discrets* avec une transformée *périodique*.

— La TFD pour les signaux *discrets périodiques* avec une transformée *discrète périodique*.

La *seule* existante sur ordinateur est la TFD.

4 Échantillonnage

— L'échantillonnage fait le lien entre les signaux analogiques et numériques.

Théorème 6. ***Théorème d'échantillonnage.*** *Un signal $f(t) \in L^2$ à bande limitée, donc $F(\nu) = 0, \forall \nu \in [-B,B]$, peut être reconstruit sans erreur à partir des échantillons $f(t_n)$ prélevés aux instants $t_n = \frac{n}{2B} = nT$.*

— F est à support borné donc se décompose en SF

$$F(\nu) = \sum_n c_n e^{\imath 2\pi \frac{n}{2B}\nu} \tag{6}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} F(\nu)e^{-\imath 2\pi \frac{n}{2B}\nu}\mathrm{d}\nu \tag{7}$$

— L'équation (7) est *aussi* la TF de F donc

$$c_n = \frac{1}{2B} f\left(-\frac{n}{2B}\right) = T\cdot f(t_n)\ !$$

— En appliquant la TF inverse à (6) on a alors

$$f(t) = \sum_n f(-t_n)\,\mathrm{sinc}(2B(t+t_n))$$

soit

$$f(t) = \sum_n f(t_n)\,\mathrm{sinc}(2B(t-t_n))$$

avec $\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$.

À compléter ...

5 Transformation de Laplace et en z

5.1 Transformation de Laplace

C'est la projection sur les fonctions propres des SLI e^{pt}, $p \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$.

Définition 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On appel transformée de Laplace bi-latérale la fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que*

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t,\ \text{avec } p = \sigma + \imath\omega$$

et $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

Définition 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On appel transformée de Laplace (unilatérale) la fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que*

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t,\ \text{avec } p = \sigma + \imath\omega$$

et $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

— Pour que l'intégrale converge, il peut y avoir des restrictions sur la partie réel de p, appelé *région de convergence*, noté $\mathcal{R}(\sigma_1, \sigma_2)$.
— Une fonction peut avoir une TL sans avoir de TF.
— La TF peut être vue comme une TL avec p restreint à l'axe imaginaire $\imath\omega, \omega \in \mathbb{R}$.
— Par conséquent, une fonction à une TF si $\imath\omega \in \mathcal{R}$.
— La TL de f peut être vue comme la TF de $f(t)e^{-\sigma t}$.
— Deux fonctions peuvent avoir même TL mais alors avec des régions de convergence différente.
— La région de convergence renseigne sur la causalité.
  — Si f est causale, alors $\sigma_2 \equiv +\infty$ et $\mathcal{R}$ est telle que $\sigma > \sigma_1$.
  — Si f est anti-causale, alors $\sigma_1 \equiv -\infty$ et $\mathcal{R}$ est telle que $\sigma < \sigma_2$.

5.1.1 Propriétés

Linéarité de la transformation de Laplace.

La translation temporelle devient une modulation

$$f(t-t_0) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} F(p)e^{-pt_0}.$$

La modulation temporelle devient une translation

$$f(t)e^{p_0 t} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} F(p-p_0).$$

La contraction temporelle devient une dilatation

$$f(at) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \text{ avec } \mathcal{R}(a\sigma_1, a\sigma_2),$$

et inversement.

La dérivation devient une multiplication par p

$$\boxed{f^{(n)}(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} p^n F(p)}$$

L'intégration devient une multiplication par $1/p$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{p}F(p)$$

avec $p \in \mathcal{R}(\sigma_1, \sigma_2) \cup]0, +\infty[$.

La convolution devient une multiplication

$$\boxed{f * g \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} F \times G}$$

avec $\mathcal{R}\left(\max\left(\sigma_1^f, \sigma_1^g\right), \min\left(\sigma_2^f, \sigma_2^g\right)\right)$.

Les valeurs limites s'otiennent par ces théorèmes

Théorème 7. ***Théorème de la valeur initiale.*** *Soit f causale et sa* TL *F. Alors*

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) \equiv f(0) = \lim_{p\to+\infty} pF(p).$$

Théorème 8. ***Théorème de la valeur finale.*** *Soit f causale et sa* TL *F. Alors*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = F(0) \equiv \lim_{p\to 0} pF(p).$$

L'inversion s'obtient en intégrant le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire, comprise dans la région de convergence,

$$f(t) = \frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\sigma-\imath\infty}^{\sigma+\imath\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}t.$$

5.1.2 Transformées usuelles

— Distribution de Dirac

$$\delta(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} 1 \quad \text{et} \quad \delta(t-t_0) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} e^{-pt_0}.$$

— Échelon

$$u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{p} \quad \text{avec} \quad \sigma > 0.$$

— Puissance

$$t^n u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \text{et donc} \quad tu(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{p^2}.$$

avec $\sigma > 0$.

— Exponentielle causale

$$e^{\alpha t}u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{p+\alpha} \quad \text{avec} \quad \sigma > \Re[\alpha],$$

$$\left(1 - e^{-t/T}\right)u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{p(1+Tp)}.$$

— Peigne de Dirac causal

$$⧢_T(t)u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{1-e^{-Tp}}.$$

— Cosinus / sinus causaux

$$\cos(\omega t)u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

et

$$\sin(\omega t)u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

avec $\sigma > 0$.

5.2 Transformation en z

C'est la projection sur les fonctions propres des SLI numériques z^n, $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Définition 4. *Soit un signal numérique (une suite) $s = \{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. On appel transformée en z la série $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que*

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n z^{-n}$$

avec $r_1 < |z| < r_2$.

— Pour que la série converge, il peut y avoir des restrictions sur le module de z, appelée *région ou anneau de convergence*, noté $\mathcal{R}(r_1, r_2)$.
— La TZ peut être vue comme une TF (à temps discret) avec z restreint au cercle unité $e^{\imath\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$.
— Donc une fonction à une TF si $e^{\imath\omega} \in \mathcal{R}$.
— La région de convergence renseigne sur la causalité.
  — Si s est causale, alors $r_2 \equiv +\infty$ et $\mathcal{R}$ est telle que $|z| > r_1$.
  — Si s est anti-causale, alors $r_1 = 0$ et $\mathcal{R}$ est telle que $|z| < r_2$.

5.2.1 Propriétés

Linéarité de la transformation en z.

Le décalage devient une multiplication par z

$$s_{n-k} \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} z^{-k} S(z).$$

La convolution devient un produit

$$u * v \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} U \times V$$

Les valeurs limites sont obtenues par ces théorèmes.

Théorème 9. ***Théorème de la valeur initiale*** *Soit s une suite causale et S sa TZ alors*

$$s_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z).$$

Théorème 10. ***Théorème de la valeur finale*** *Soit s une suite causale et S sa TZ alors*

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{z \to 1} (z-1) X(0)$$

L'inversion s'obtient en intégrant le long d'un cercle C appartenant à la région de convergence

$$s_n = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{(C)} S(z) z^{n-1} \mathrm{d}z.$$

5.2.2 Transformées usuelles

— Impulsion

$$\delta_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} 1.$$

— L'échelon

$$u_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \ |z| > 1.$$

— La droite

$$n u_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \ |z| > 1.$$

— L'exponentielle

$$a^n u_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \ |z| > |a|.$$

— Cosinus et sinus

$$\cos(\omega n)\, u_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} \frac{1 - z^{-1}\cos(\omega)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega) + z^{-2}}$$

et

$$\sin(\omega n)\, u_n \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} \frac{1 - z^{-1}\sin(\omega)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega) + z^{-2}}$$

avec $|z| > 1$.

6 Filtrage linéaire

6.1 Définitions

— Un filtre est un système *linéaire* et *invariant* dans le temps.

— Un filtre est un système avec une convolution comme relation entrée–sortie,

$$s(t) = \int e(u) h(t-u)\, \mathrm{d}u,$$

à temps continu et

$$s_k = \sum_n e_n h_{n-k}$$

à temps discret.

— Les exponentielles complexes e^{pt} et z^k sont les *signaux propres* des filtres.

Les filtres sont caractérisés par trois réponses.

— La réponse impulsionnelle (RI)

$$h(t) = \mathcal{H}[\delta(t)]$$

à temps continu avec $\delta(t)$ la distribution de Dirac et

$$h_k = \mathcal{H}[\delta_k]$$

à temps discret avec δ_k la fonction de Kronecker.

— La fonction de transfert (FT) $H(p)$ qui donne la réponse en présence d'un signal propre (e^{pt}). On a

$$\delta(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} H(p);\ \mathcal{R}(\sigma_1, \sigma_2)$$

à temps continu et

$$\delta_k \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons}} H(z);\ \mathcal{R}(r_1, r_2)$$

à temps discret.

— La réponse en fréquence (RF) qui est la réponse à une sinusoïde. C'est la restriction de la TL à $p = \imath\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ une pulsation à temps continu et la restriction de z au cercle unité en discret. On a

$$\delta(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} H(\nu).$$

à temps continu et

$$\delta_k \underset{\text{TFD}^{-1}}{\overset{\text{TFD}}{\rightleftharpoons}} H(\nu).$$

à temps discret, avec $\imath\omega = \imath 2\pi\nu$.

— Par linéarité des SLI et de la TF on a alors

$$S(\nu) = H(\nu) E(\nu).$$

6.2 Propriétés

Les filtres réalisables sont

— causaux

— stables, soit une entrée bornée génère une sortie bornée. Pour cela il faut une RI sommable

$$\int |h(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty \quad \text{et} \quad \sum |h_k| < +\infty.$$

— Au sens large, la RI peut posséder un nombre fini de Diracs.

6.3 Filtres idéaux

Les filtres idéaux ne sont pas réalisables en pratique. Ils servent de référence ainsi que de gabarit pour la synthèse de filtres réels.

6.3.1 Filtre passe-bas

À compléter ...

6.3.2 Filtre passe-haut

À compléter ...

6.3.3 Filtre passe-bande

À compléter ...

6.3.4 Filtre coupe-bande

À compléter ...

6.4 Filtres dynamiques

— De nombreux systèmes physiques se modélisent par équations différentielles à coefficients constants

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 s(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t).$$

— Pour les systèmes numériques, ce sont les équations récurentes à coefficients constant

$$a_n s_{k-n} + \cdots + a_1 s_{k-1} + a_0 s_k = b_m e_{k-m} + \cdots + b_1 e_{k-1} + b_0 e_k.$$

— Par propriétés de dérivation de la TL on obtient une FT sous forme de fraction rationnelle

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{ou} \quad H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

où N et D sont des polynômes en p ou z^{-1}.

— On appelle *pôle* de H les racines de D.

— On appelle *zéros* de H les racines de N.

— Le filtre est causal si la région de convergence contient
  — l'axe imaginaire $\imath\omega$ en temps continu,
  — le cercle unité $e^{\imath\omega}$ en temps discret.

— Le filtre est stable si
  — il n'a pas de pôle à partie réelle positive en temps continu,
  — il n'a pas de pôle à l'extérieur du cercle unité en temps discret.

— Le degré du numérateur doit être inférieur au degré du dénominateur.

6.5 Filtres numériques

— On distingue deux types de filtres.
  — Les filtres à réponse impulsionnelle finie dit RIF ou *FIR* pour *Finite Impulse Response*.
  — Les filtres à réponse impulsionnelle infinie dit RII ou *IIR* pour *Infinite Impulse Response*.

— Pour les RIF la relation entrée-sortie devient

$$s_k = \sum_{n=-n_1}^{n_2} e_n h_{k-n}$$

et

$$s_k = \sum_{n=0}^{n_2} e_n h_{k-n}$$

pour un filtre causal.

— Pour calculer la sortie des filtres RII par convolution il faut calculer une infinité de produits et de sommes.

— On peut tronquer la réponse avec une erreur.

— On utilise plutôt la récurrence.

À compléter ...